

Padovanfolgen

Dir.Mag. Kurt Wagner, Klagenfurt

Definition $x_0, x_1, x_2; x_{n+3} = a \cdot x_{n+1} + b x_n, n=0,1,2,3...$

Beispiel und Vergleich mit der Fibonacci-Folge

| | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-------|
| Fibo | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | |
| Padovan | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 12 | 16 | |

Die Padovan-Folge steigt weniger rasch an.

Der Ansatz $x_n = u \cdot q^n$ (u-beliebiger Koeffizient) führt auf die

Charakteristische Gleichung $q^3 - aq - b = 0$

Lösungsansatz (bei drei unterschiedlichen Lösungen q_k) $x_n = uq_1^n + vq_2^n + wq_3^n$

Der Ansatz verwendet die Linearität in der Definition der Folge.

Die Koeffizienten u, v und w sind durch die Startglieder x_0, x_1 und x_2 bestimmt.

Ohne die kubische Gleichung voll zu lösen gewinnen wir mit Hilfe des Wurzelsatzes Aussagen über das Grenzverhalten der Folgen. Jede Folge ist durch den Punkt P(a,b) in der von a und b aufgespannten Parameterebene bestimmt. Gesucht sind Teilbereiche dieser Ebene, in denen die Folge ein bestimmtes Verhalten zeigt.

Wurzelsatz $q_1 + q_2 + q_3 = 0, q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 = -a, q_1q_2q_3 = b$

Zur Vereinfachung setzen wir $q = q_1$ und $q_2q_3 = r^2$ und erhalten

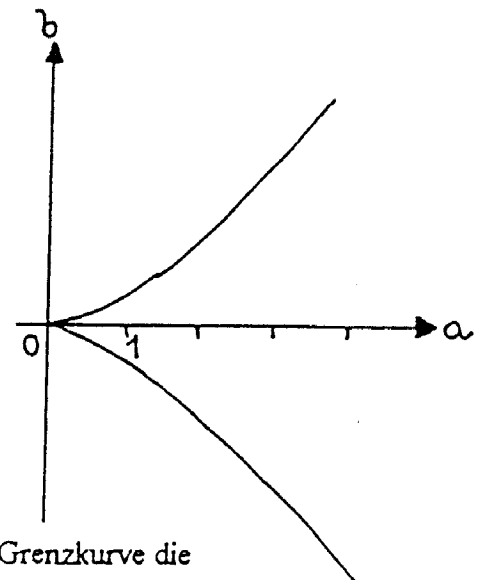
(1) $q_2 + q_3 = -q$

(1a) $2r \cos \varphi = -q$ bei konjugiert komplexen Lösungen

(2) $q^2 - r^2 = a$

(3) $qr^2 = b$

Nach (1) und (3) gilt $b > 0 : q > 0, q_2 < 0, q_3 < 0, q > |q_2|, q > |q_3|$
 $b < 0 : q < 0, q_2 > 0, q_3 > 0, |q| > q_2, |q| > q_3$



Diskussion des Grenzverhaltens der Padovanfolgen

1. Grenzkurve

Längs dieser Kurve fallen 2 der drei Quotienten zusammen.

$q_2 = q_3 = r, q = -2r, a = 3r^2, b = -2r^3$ oder

$q_2 = q_3 = -r, q = 2r, a = 3r^2, b = 2r^3$, in beiden Fällen ergibt sich als Grenzkurve die

Semikubische Parabel $27b^2 = 4a^3$, auf dieser Kurve gilt $r^2 = a/3$ und $q = 3b/a$.

Welche Domänen trennt die Grenzkurve? Wir bestimmen dazu $q_2 - q_3$

$(q_2 - q_3)^2 = (q_2 + q_3)^2 - 4q_2q_3 = q^2 - 4r^2 = a - 3r^2 = a - a_1$, wenn (a_1, b_1) auf der Grenzkurve liegt.

$a > a_1$ es gibt 3 reelle Werte q, q_2, q_3

$a = a_1$ es gibt 2 reelle Werte q, q_2 ($q_3 = q_2$)

$a < a_1$ es gibt einen reellen Wert q und 2 konjugiert komplexe Werte q_2, q_3

Kurz zusammengefaßt: $b^2 < 4a^3/27$ reelle, $b^2 > 4a^3/27$ komplexe Domäne.

2. Größenordnung von q und r²

Elimination von r² aus (2) und (3)

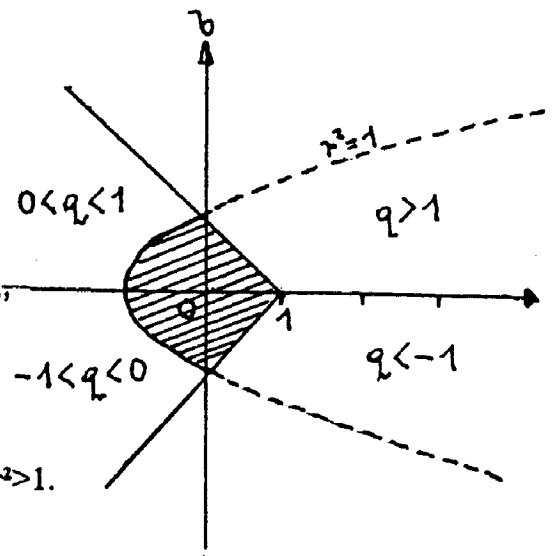
b > 0: $b = q(q^2 - a)$, $q = 1 \Rightarrow b = 1 - a$, $q < > 1 \Rightarrow b < > 1 - a$, $0 < q < 1$
 die Gerade $b = 1 - a$ bestimmt 2 Halbebenen mit $q < > 1$

b < 1: $-b = -q(q^2 - a)$, $q = -1 \Rightarrow b = a - 1$, $q < > -1 \Rightarrow b < > a - 1$,
 die Gerade $b = a - 1$ bestimmt 2 Halbebenen mit $q < > -1$.

Elimination von q aus (2) und (3)

$a = b^2/r^4 - r^2$, $r^2 = 1 \Rightarrow a = b^2 - 1$, $r^2 < > 1 \Rightarrow a < > b^2 - 1$.

Im Inneren der Parabel $a = b^2 - 1$ ist $r^2 < 1$, außerhalb von ihr ist $r^2 > 1$.



3. Konvergenzbereich

Eine Folge kann nur konvergent sein, wenn alle Quotienten betragsmäßig 1 oder kleiner 1 sind. Innerhalb des Parabelsegmentes ADC (siehe Skizze) und des Dreiecks BCD: Nullfolge.

Außerhalb dieser Domäne ist die Folge divergent und unendlich.

Auf der Begrenzung ist die Folge teils konvergent (Strecke BC) teils divergent, aber endlich.

4. Verhalten auf den Achsen

a-Achse: $x_{n+3} = a \cdot x_{n+1}$, es entstehen 2 geometrische Folgen mit dem Quotienten a, wobei die Wahl von x_0 keinen Einfluß auf die weiteren Folgenglieder hat.

$$\begin{matrix} x_0, x_1, & ax_1, & a^2x_1, \dots \\ & x_2, & ax_2, & a^2x_2, \dots, \end{matrix} \text{ konvergent für } -1 < a < 1.$$

b-Achse: $x_{n+3} = b \cdot x_n$, es entstehen 3 geometrische Folgen mit dem Quotienten b.

$$\begin{matrix} x_0, & bx_0, & b^2x_0, \dots \\ x_1, & bx_1, & b^2x_1, \dots \\ x_2, & bx_2, & b^2x_2, \dots, \end{matrix} \text{ konvergent für } -1 < b < 1$$

In den Punkten A, B, C und D ist die Folge entweder konstant oder zyklisch.

5. Verhalten auf der Strecke BC

Die Folge ist konvergent mit einem Grenzwert, der von den Startgliedern x_0, x_1, x_2 abhängt.

Die 'physikalische' Bestimmung des Grenzwertes X ersetzt den in B und C nicht vorhandenen Grenzwert durch den 'Schwerpunkt'.

$$b=0 \Rightarrow X = (x_1 + x_2)/2, \quad b=1 \Rightarrow X = (x_0 + x_1 + x_2)/3$$

Die Formel $X = (bx_0 + x_1 + x_2)/(b+2)$ faßt nicht nur die beiden oberen Beziehungen zusammen, sie gilt auch für beliebige b.

Beispiel: $a=0.3, b=0.7, x_0=1, x_1=3, x_2=1.7: X = (0.7+3+1.7)/2.7 = 2$

6. Verhalten auf der Strecke BD

Beim Übergang von b zu -b ändert sich das Vorzeichen aller Quotienten. Vergleichen wir die Folge in $P(a, -b)$ mit jener in $P(a, b)$, wobei in letzterer x_1 durch $-x_1$ zu ersetzen ist, so stimmt jeder zweite Wert überein. Da q fortwährend das Vorzeichen wechselt, erhalten wir an Stelle eines Grenzwertes zwei Häufungspunkte H und -H.

$$H = (-bx_0 - x_1 + x_2)/(-b + 2)$$

Beispiel: In den beiden Folgen

$a=0.5, b=-0.5, x_0=1, x_1=2, x_2=3: 1 \ 2 \ 3 \ 0.5 \ 0.5 \ -1.25 \ 0 \ -0.88 \ 0.63 \dots$ und

$a=0.5, b=0.5, x_0=1, x_1=-2, x_2=3: 1 \ -2 \ 3 \ -0.5 \ 0.5 \ 1.25 \ 0 \ 0.88 \ 0.63 \dots$

stimmen die Glieder mit geradem Index überein.

7. Zyklische Folgen auf dem Parabelbogen DAC

Für große n bekommen die Folgenglieder wegen $r=1$ die Gestalt $x_n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$. Die Periode p wird asymptotisch erreicht, wenn der Winkel $\varphi = 2\pi/p$ beträgt; $[(n+p)\varphi \Rightarrow n\varphi]$. Die dazu notwendigen Parameter betragen (nach (1a)) $b = -2\cos(2\pi/p)$ und $a = b^2 - 1$.

Beispiele: $p=3, b=1, a=0$
 $p=4, b=0, a=-1$
 $p=5, b=-0.618, a=-0.618$
 $p=24, b=-1.932, a=-0.51763, a=-0.73205$ hier entsteht eine Schwierigkeit, da b außerhalb des erlaubten Bereiches liegt. Man sucht ein Vielfaches von 15° , das nicht Teiler von 360° ist. Mit 75° erhält man ein b im Bereich $-1 < b < 1$ und eine zyklische Folge mit der Periode 24.
 $b = -0.51763, a = -0.73205$.

Das zuletzt aufgezeigte Verfahren ist nicht möglich für die Winkel 45° und 30° , daher sind die Perioden $p=8$ und $p=12$ nicht zu erzeugen.

8. Zielquotient und Isoquoten

In der reellen Domäne wird sich der größte Quotient mit steigendem n immer mehr durchsetzen und es gilt $\lim(x_{n+1}/x_n) = q = z$ Zielquotient. In der komplexen Domäne kann es nur für $q^2 > r^2$, also für $a > 0$ (2) einen Zielquotienten geben.

Isoquoten sind Geraden, längs denen die Folgen den gleichen Zielquotienten besitzen. Wir beweisen den Satz: Die Isoquoten sind Strecken auf den Tangenten der Grenzkurve. Nach Abschnitt 1 gilt auf einem Ast der Grenzkurve $q_2 = q_3 = r, a = 3r^2, b = -2r^3$ und $db/da = -r$. Die Tangente hat die Gleichung $b + 2r^3 = -r(a - 3r^2)$ bzw. $b = r^3 - ar$. Andererseits muß der Zielquotient die char. Gleichung erfüllen: $z^3 - az - b = 0$, d.h. $r = z$. Die Isoquoten genügen daher der Gleichung $b = z^3 - az$ im Intervall $[0, z^2]$.

Wir fragen noch, ob man den Zielquotienten der originalen Fibonacci-Folge, die 'goldene' Zahl $g = 1.618\ 034$ auch in einer Padovanfolge mit ganzzahligen Parametern bekommen kann. Wegen der Irrationalität von g erscheint dies zunächst aussichtslos. Wir benutzen die Eigenschaft der goldenen Zahl, durch ihre Potenzen die Fibonaccifolge zu erzeugen.
 $g^2 = ((1 + \sqrt{5})/2)^2 = (6 + 2\sqrt{5})/4 = 1 + g, g^3 = 1 + 2g, g^4 = 2 + 3g, \dots$
 Die Isoquote für g lautet daher $1 + 2g = a \cdot g + b$, sie ist ganzzahlig zu erfüllen für $a=2$ und $b=1$. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, ist nicht nur der Zielquotient g sondern es entsteht überhaupt die originale Fibonacci-Folge.

9. Padovan-Folgen und Fibonacci-Folgen

Kann die Fibonacci-Folge $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ durch eine Padovanfolge $y_{n+3} = a'y_{n+1} + b'y_n$ dargestellt werden? Dies ist immer möglich. Wir multiplizieren die char. Gleichung der Fibonacci-Folge mit einem noch zu bestimmenden Wurzelfaktor $q - q_3$ und erhalten

$$(q^2 - aq - b)(q - q_3) = q^3 - (a + q_3)q^2 - (b - aq_3)q - (-bq_3) = 0.$$

Damit eine Padovan-Folge entsteht, muß der Koeffizient von q^2 verschwinden, also $q_3 = -a$. Wir lesen ab: $a' = a^2 + b$ und $b' = ab$, außerdem muß $x_2 = ax_1 + bx_0$ gewählt werden.

Der umgekehrte Weg ist komplizierter, nur unechte Padovan-Folgen können Fibonacci-Folgen sein. Wir wählen $a = -q$ und $b = b'/a$. Ist $x_2 = ax_1 + bx_0$ erfüllt, so ist die Padovan-Folge unecht, d.h., sie kann auch als Fibonacci-Folge dargestellt werden. In der reellen Domäne muß diese Probe für alle drei Quotienten durchgeführt werden.

Andere Möglichkeit: x_0, x_1, x_2, x_3 bestimmen (außer bei Vorliegen einer geom. Folge) eindeutig eine Fibonacci-Folge mit $a=(x_0x_3 - x_1x_2)/(x_0x_2 - x_1^2)$ und $b=(x_2^2 - x_1x_3)/(x_2x_2 - x_1^2)$. Gilt für die vorliegende Padovan-Folge $a'=a^2+b$ und $b'=ab$, so ist sie unecht, sonst echt.

10. Perrin-Folge

Dies ist eine Padovan-Folge mit ganz bestimmten Startgliedern. *Perrin* hat 1899 die schon vorher von *Lucas* beschriebene Folge weiter untersucht und folgendes gezeigt. Immer wenn n eine Primzahl ist, so ist das Folgenglied x_n durch n teilbar. Man kann auch sagen n ist sicher zusammengesetzt, wenn es x_n nicht teilt. Der Beweis für diese Aussage scheint zunächst ziemlich aussichtslos, denn $x_n = uq_1^n + vq_2^n + wq_3^n$ enthält nur irrationale, zum Teil komplexe Zahlen, die sich für Teilbarkeitsuntersuchungen schlecht eignen. Eine Erleichterung könnte eintreten, wenn man $u=v=w=1$ mit vernünftigen Startgliedern erreichen kann.

Man kann in diesem Fall ansetzen $x_n = q_1^n + q_2^n + q_3^n$

$$x_0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$x_1 = q_1 + q_2 + q_3 = 0 \text{ nach (1)}$$

$$x_2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = (q_1 + q_2 + q_3)^2 - 2(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3) = 2a \text{ nach (2)}$$

Die geheimnisvollen Startglieder sind also 3, 0 und 2 für die originale Padovanfolge mit $a=1$. Er gilt jedoch auch für (ganzzahlig) erweiterte Padovanfolgen mit den Startgliedern 3, 0 und $2a$. Zum Beweis verwenden wir den trinomischen Lehrsatz.

$$(q_1 + q_2 + q_3)^n = \sum n! / (a!b!c!) q_1^a q_2^b q_3^c \text{ mit } 0 \leq a, b, c \leq n \text{ und } a + b + c = n.$$

Da n prim ist, kann der Faktor n in $n!$ nur weggekürzt werden, wenn eine der Größen a, b, c den Wert n annimmt, die beiden anderen müssen dann Null sein. So erhalten wir die Kongruenz:

$$x_n = q_1^n + q_2^n + q_3^n \equiv (q_1 + q_2 + q_3)^n \equiv 0 \pmod n$$

Wir berechnen die ersten 11 Glieder nach der auf Seite 1 gegebenen Definition.

| a | b | n=3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|------|--------|-------|-------------|---------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| a | b | $3b$ | $2a^2$ | $5ab$ | $2a^3+3b^2$ | $7a^2b$ | $2a^4+8ab^2$ | $9a^3b+3b^3$ | $2a^5+15a^2b^2$ | $11a^4b+11ab^3$ |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 5 | 5 | 7 | 10 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 3 | 9 | 2 | 15 | 29 | 21 | 74 | 108 | 137 | 330 |

Für $n=3, 5, 7$ und 11 ist die Teilbarkeit durch n gegeben. Ein Beispiel für eine größere Zahl: Für $a=b=1$ und $n=73$ lautet das Folgenglied 822 261 415, mit den Faktoren 11 263 855 und 73.

Wie jeder Primzahltest kann auch die Perrin-Folge zur Lösung des Faktorisierungsproblems und damit für die Verschlüsselungsverfahren für Daten von Bedeutung sein.

Der Satz ist jedoch nicht umkehrbar. Wenn ein Folgenglied durch den Index teilbar ist, so muß dieser keine Primzahl sein. Bei den originalen Perrinfolgen sind Gegenbeispiele erst bei sehr hohen Zahlen zu finden. Für die erweiterten Folgen können sie schon früher auftreten.

Für $a=1$ und $b=3$ z.B. ist $x_9=108$, durch 9 teilbar, 9 jedoch keine Primzahl.

Es gibt noch Padovanfolgen einer zweiten Art mit der Definition

$$x_{n+3} = a \cdot x_{n+2} + b x_n, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

Für diese gilt eine entsprechender Satz. Immer wenn n eine Primzahl ist, so ist der Term $x_n - a$ durch n teilbar. Die Anfangsglieder sind nun $3, a$ und a^2 . Beispiele für die ersten Glieder:

| a | b | n=3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|----------|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|--------------------|---------------------|
| a | b | a^3-3b | a^4-4ab | a^5-5a^2b | a^6+6a^3b | a^7-7a^4b | a^8+8a^5b | a^9+9a^6b | $a^{10}-10a^7b$ | $a^{11}+11a^8b$ |
| | | | | | $+3b^2$ | $+7ab^2$ | $+12a^2b^2$ | $18a^3b^2+3b^3$ | $5^2a^4b^2+10ab^3$ | $33a^5b^2+22a^2b^3$ |
| 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 10 | 15 | 21 | 31 | 46 | 67 |
| 2 | 1 | 11 | 24 | 52 | 115 | 254 | 560 | 1235 | 2724 | 6008 |

Der Satz ist für $n=3, 5, 7, 11$ erfüllt. Anderes Beispiel: Für $a=2$ und $b=1$ lautet das 23. Glied 79 611 696 und 79 611 694 ist das Produkt aus 23 und 3 461 378.

11. Explizite Darstellung

Die charakteristische Gleichung $q^3 - aq - b = 0$ besitzt die Diskriminante $D = -a^3/27 + b^2/4$. Mit

$$\alpha^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{D}, \quad \beta^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{D}$$

lauten bei $D > 0$ die Lösungen (Cardanische Formeln)

$$q_1 = \alpha + \beta, \quad q_2 = -(\alpha + \beta)/2 + (\alpha - \beta)/2 \cdot i \sqrt{3}, \quad q_3 = -(\alpha + \beta)/2 - (\alpha - \beta)/2 \cdot i \sqrt{3}$$

Für $D < 0$ geht man zu Polarkoordinaten über und findet

$$u^3 = \rho^3 [\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)], \quad v^3 = \rho^3 [\cos(3\varphi) - i \sin(3\varphi)]$$

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{a}{3}}, \quad \cos 3\varphi = \frac{b}{2\rho^3}$$

In diesem Fall lauten die Lösungen

$$q_1 = 2\rho \cos(\varphi), \quad q_2 = 2\rho \cos(\varphi + 2\pi/3), \quad q_3 = 2\rho \cos(\varphi + 4\pi/3)$$

Die explizite Darstellung der Folgenglieder lautet $x_n = uq_1^n + vq_2^n + wq_3^n$

Die Koeffizienten u, v, w werden durch Vergleich mit den Startgliedern bestimmt. Es entsteht das Gleichungssystem

$$u + v + w = x_0$$

$$uq_1 + vq_2 + wq_3 = x_1$$

$$uq_1^2 + vq_2^2 + wq_3^2 = x_2$$

mit der Determinante $\det = (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)(q_3 - q_1)$. Bei unterschiedlichen Lösungen für die Quotienten ist das System immer lösbar. Es ergibt sich

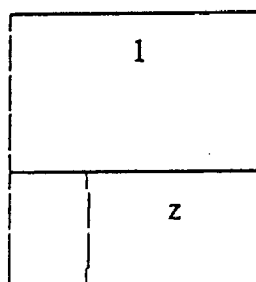
$$u = (q_3 - q_2)(x_0q_2q_3 + x_1q_1 + x_2)/\det$$

$$v = (q_1 - q_3)(x_0q_1q_3 + x_1q_2 + x_2)/\det$$

$$w = (q_2 - q_1)(x_0q_1q_2 + x_1q_3 + x_2)/\det$$

Der Zielquotient der originalen Padovan-Folge ($a=b=1$) ist

$$q = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} = 1.324\,718\dots \quad \text{'Plastikzahl'}$$



Es gibt für die Plastikzahl auch eine geometrische Interpretation. Wenn man ein Quadrat in drei ähnliche Rechtecke zerlegt, stehen die Seiten x und y im Verhältnis der Plastikzahl.

Die Seitenverhältnisse liefern $1/x = z/(1-x)$ und $1/x = (1-x)/(1-z)$ und nach Elimination von z erhalten wir $x^3 = (1-x)^2$ und die homogene Beziehung $x^3 - y^3 = (1-x)^2(1-1+x) = xy^2$; dividiert durch y^3 ergibt $(x/y)^3 - (x/y) - 1 = 0$, das ist die charakteristische Gleichung.

12. Explizite Darstellung längs der Grenzkurve

Für ein Wertepaar (a, b) auf der Grenzkurve ist der in Abschnitt 11 benützte Ansatz nicht möglich. Wir versuchen eine Darstellung mit noch unbekannter Folge y_n .

$$x_n = uq_1^n + y_nq_2^n$$

Beim Einsetzen in die Definitionsgleichung für Padovan-Folgen hebt sich der erste Anteil weg, da q_1 eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Nach Division durch q_2^n verbleibt

$$y_{n+3} \cdot q_2^3 = ay_{n+1}q_2 + by_n, \text{ mit } q_2 = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Einsetzen von q_2 und b (nach Abschnitt 1) ergibt

$$\pm y_{n+3} \cdot (a/3) \sqrt{\frac{a}{3}} = \pm a \sqrt{\frac{a}{3}} y_{n+1} - (\pm 2a/3) \sqrt{\frac{a}{3}} y_n$$

oder vereinfacht $y_{n+3} = 3y_{n+1} - 2y_n$.

Diese Rekursion bestimmt eine arithmetische Folge, falls y_0, y_1, y_2 bereits eine solche bilden. Damit kommen wir zur expliziten Darstellung des Folgengliedes x_n ($q_1 = -2q_2$)

$$x_n = [y_0 + n \cdot d + (-2)^n \cdot u] q_2^n, \text{ mit } q_2 = -\text{sgn}(b) \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Die Koeffizienten zur Anpassung der Folge an die Anfangsglieder sind u, y_0 und d . Die arithmetische Folge ist eine interne, sie wird nur in Sonderfällen auch wirklich auftreten.

Die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} x_0 &= u + y_0 \\ x_1/q &= -2u + y_0 + d \\ x_2/q^2 &= 4u + y_0 + 2d \end{aligned}$$

werden gelöst durch

$$\begin{aligned} u &= (x_0 q^2 - 2x_1 q + x_2)/(9q^2) \\ y_0 &= (8x_0 q^2 + 2x_1 q - x_2)/(9q^2) \\ d &= (-6x_0 q^2 + 3x_1 q + 3x_2)/(9q^2) \end{aligned}$$

Damit die arithmetische Folge 'sichtbar' wird, muß offenbar $q=1$ sein. Dies erfordert $a=3, b=-2$. Wenn die Startglieder bereits eine arithmetische Folge bilden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u &= (x_0 - 2x_1 + x_2)/9 = 0 \\ y_0 &= (8x_0 + 2x_1 - x_2)/9 = x_0 \\ d &= (-6x_0 + 3x_1 + 3x_2)/9 = (-9x_0 + 9x_1)/9 = x_1 - x_0. \end{aligned}$$

Für $q=-1$ ($a=3, b=2$) entsteht eine arithmetische Folge mit wechselndem Vorzeichen.

Literatur:

Spektrum der Wissenschaft, November 1997, Seite 10f.
 J.H.Convay, R.K.Guy: The Book of Numbers, Seite 111f., Springer-Verlag New York 1995
 Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics, Seite 276ff., Addison-Wesley Publ.Comp.1989